

I、IIのどちらかに☑をつけること。

☐

I [中学校・特別支援学校受験者]

☐

II [高等学校受験者]

第 1 問題

問 1	11 (4 点)						
問 2	長方形の周の長さを $4a$ とする。ただし、 $a>0$ とする。 長方形の 1 辺の長さを x ($0<x<2a$)、面積を y とおくと、 $y = x(2a - x)$ である。 $y = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2$ となり、 $0<x<2a$ より、 $x = a$ のとき、すなわち正方形のとき面積は最大となることが分かる。 (8 点)						
問 3	P (2、 $\frac{1}{2}$) (4 点)						
問 4	16 桁 (4 点)						
問 5	(1)	5 : 6 (4 点)	(2)	9 : 2 (4 点)			
問 6	(1)	①	G $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ (4 点)	②	O (3, 1) (4 点)	③	H (2, 2) (4 点)
	(2)	外心Oは、2本の垂直二等分線の方程式、 $x=3$ 、 $y=x-2$ を考えれば、O (3, 1) 垂心Hは、 $x=2$ 、 $y=x$ の2本の直線交点を求めればよいので、H (2, 2) 直線OHの方程式は、 $y=-x+4$ この直線の方程式に重心Gの x 座標を代入すると、 $y=-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$ より重心の y 座標に一致するので、 重心Gは直線OH上にありG、O、Hは一直線上にあり、 その直線の方程式は、 $y=-x+4$ である。 (8 点)					

I [中学校・特別支援学校受験者]
第 2 問題

問 1	理由：道路の幅 x m の範囲 $0 < x < 20$ を見落としているため 正答： 道路の幅を x m とする。ただし、花壇の縦の長さから考えて $0 < x < 20$ である。 花壇の面積が長方形の土地の $\frac{5}{6}$ 倍となるようにするので、 $(20-x)(30-x)=20\times 30\times \frac{5}{6}$ $(20-x)(30-x)=500$ $x^2-50x+100=0$ $x=25\pm\sqrt{25^2-100}=25\pm\sqrt{525}=25\pm5\sqrt{21}$ ここで、 $x=25+5\sqrt{21}$ において $x=25+5\sqrt{21}>20$ となり、花壇の縦の長さよりも道路の幅が長くなってしまうので、 $x=25+5\sqrt{21}$ の値は問題に合わない。 また $x=25-5\sqrt{21}$ は、$0 < x < 20$ を満たす。 したがって、花壇に作る道路の幅は $(25-5\sqrt{21})$ m である。(問題の答) (8 点)
-----	---

I [中学校・特別支援学校受験者]
第2問題

問2

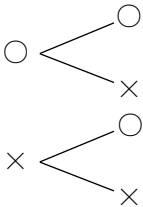
(指導例1)

①～③のそれぞれが起こる確率が $\frac{1}{3}$ であるという考えが誤りであることを実感させるためには、硬貨（例えば10円硬貨）を2回ずつ投げるとする試行を何度も行い、(①～③のそれぞれが起きた回数)／(硬貨を2回ずつ投げた回数)の値を求めさせてみることである。そうすれば、試行回数を繰り返しても $\frac{1}{3}$ という値に近づきそうにないことに気づき、それが何故だろうということに興味関心を持つようになる。

その上で、硬貨の表と裏の出方について、同様に確からしい表裏の出方にはどのような場合があるのかを考えさせる。(表、表)、(表、裏)、(裏、表)、(裏、裏)の4通りであり、どの表裏の出方も同様に確からしい(すなわちどの場合も確率が $\frac{1}{4}$)ことを理解させたい。

(指導例2)

表を○、裏を×としたとき、



のように樹形図を描かせたり、

1回目 \ 2回目	表	裏
表	(表、表)	(表、裏)
裏	(表、裏)	(裏、裏)

のようにクロス表を書かせるなどの方法で、同様に確からしい(4通りのそれぞれが起こる確率は $\frac{1}{4}$)ことを理解させたい。

硬貨を投げる回数は2回だけであり、ベルヌーイ試行を2回行っているということだが、高等学校の数学Aでは独立試行の確率の内容に繋がり、数学Bでは二項分布の学習に繋がるので、中学校の段階で実験を行って正誤を予想させるとともに、理論的な理解もしっかりとさせたい。

など
(8点)

I [中学校・特別支援学校受験者]
第 3 問題

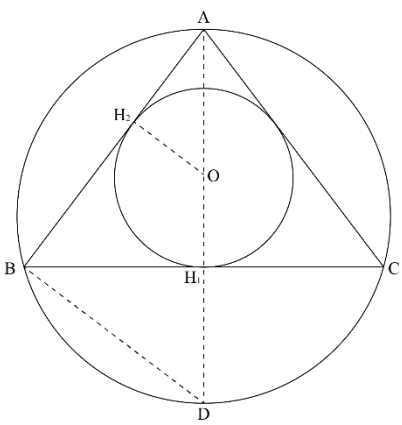
問 1	$t > 0$ とするとき、$A(-t, t^2)$、$B(-t, -\frac{1}{2}t^2)$、$C(t, -\frac{1}{2}t^2)$、$D(t, t^2)$ とおく。$AB = 2AD$ の条件から、$t^2 + \frac{1}{2}t^2 = 2 \times 2t$ $\frac{3}{2}t^2 = 4t$ $3t^2 = 8t$ $(3t - 8)t = 0$ $t > 0$ より、$t = \frac{8}{3}$ $A(-\frac{8}{3}, \frac{64}{9})$ $C(\frac{8}{3}, -\frac{32}{9})$ A、C を通る 1 次関数の傾きの値は -2 であるから、$y = -2x + k$ が C を通るように定数 k の値を定めればよい。 $-\frac{32}{9} = -2 \times \frac{8}{3} + k$ $k = -\frac{32}{9} + \frac{16}{3} = \frac{-32 + 48}{9} = \frac{16}{9}$ (答) (8 点)
-----	--

I [中学校・特別支援学校受験者]
第3問題

問2

図のように円 O_1 の中心を O 、 H を H_1 とおく。
 AH_1 と円 O_2 の交点で A でない点を D 、
 O から辺 AB に下ろした垂線の足を H_2 とおく。
 $\triangle ABH_1 \sim \triangle AOH_2 \sim \triangle ADB$ であり、
条件より

$$\begin{aligned} BH_1 : AH_1 : AB \\ &= OH_2 : AH_2 : OA \\ &= DB : AB : DA \\ &= 3 : 4 : 5 \end{aligned}$$
よって O_1 の半径を、 $OH_1 = OH_2 = 3a$ とおくと、
 $OA = 5a$ であるから $AH_1 = 8a$ である。
したがって $AB = 10a$ になるので、
 AD すなわち O_2 の直径は $\frac{25}{2}a$ となり、半径は $\frac{25}{4}a$ である。
以上より、 O_2 の半径は S_1 の半径 $\frac{25}{12}$ 倍である。



(10 点)

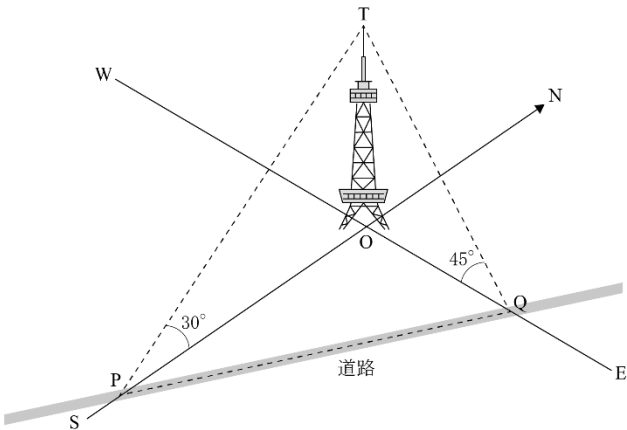
整 理 番 号	

(この欄は記入しないこと)

I [中学校・特別支援学校受験者]
第4問題

問 1

塔の先端をT、真下をOとすると、△TOQは、 $\angle TOQ=90^\circ$ の直角二等辺三角形であり、また、△TOPは、 $\angle TOP=90^\circ$ 、 $\angle TPO=30^\circ$ の直角三角形である。
よって、テレビ塔の高さを $x\text{m}$ とするとき、
 $OQ=x$ 、 $OP=\sqrt{3}x$
である。
△OPQに三平方の定理を用いると、
$$x^2+(\sqrt{3}x)^2=150^2$$
$$4x^2=150^2$$
$$x>0 \text{ より、}$$
$$2x=150$$
$$x=75$$
したがって、テレビ塔Aの高さは 75m である。(答)



(8点)

整 理 番 号	

(この欄は記入しないこと)

I [中学校・特別支援学校受験者]
第4問題

問2

(1) 角の二等分線の性質より、 $AC : AD = BC : BD$ であるから、 $BC = 6$
図1のように、2点D、Eを線分で結ぶ。
また、 $\triangle ACB$ と $\triangle DCE$ において、
 $\angle ACB = \angle DCE$ (共通) ...①
円周角の定理から、
 $\angle CAB = \angle CDE$...②
①と②より2組の角の大きさが等しいので、 $\triangle ACB \sim \triangle DCE$
したがって、 $BC : CA = EC : CD$
 $6 : 12 = EC : 10$ より、 $EC = 5$

(2) (1) を利用して
 $BD = 4$ 、 $AE = 7$
また図2のように、2点C、Fを線分で結ぶ。
 $\triangle CDF$ と $\triangle ADB$ において、
 $\angle CDF = \angle ADB$ (共通) ... ③
円周角の定理から、
 $\angle DCF = \angle DAB$... ④
③と④より2組の角の大きさが等しいので、 $\triangle CDF \sim \triangle ADB$
したがって、 $CD : DF = AD : DB$
 $10 : DF = 8 : 4$ より、 $DF = 5$ 、 $AF = 3$
以上より、
 $1 - \left(\frac{7}{12} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} \right) = 1 - \left(\frac{7}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{23}{32} = \frac{9}{32}$
 $\frac{9}{32}$ 倍 ...答

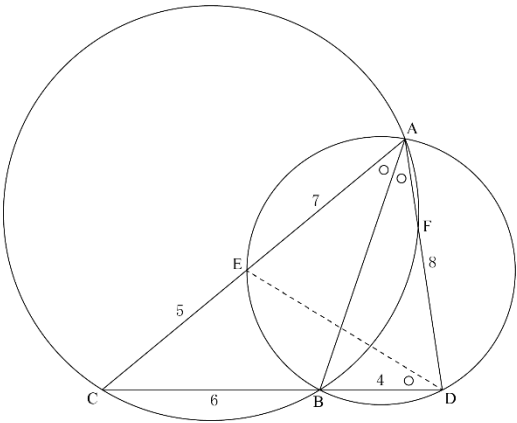


図 1

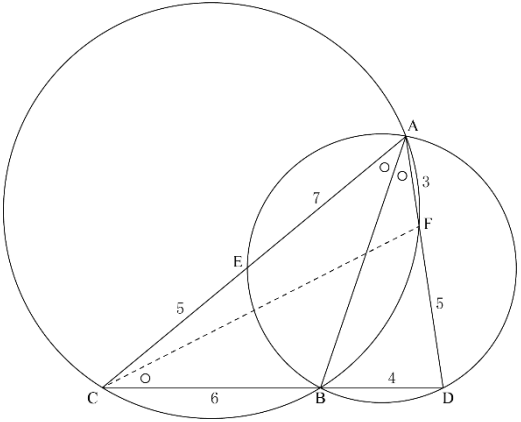


図 2

(10 点)

整 理 番 号	

(この欄は記入しないこと)

Ⅱ [高等学校受験者]
第 2 問題

問 1

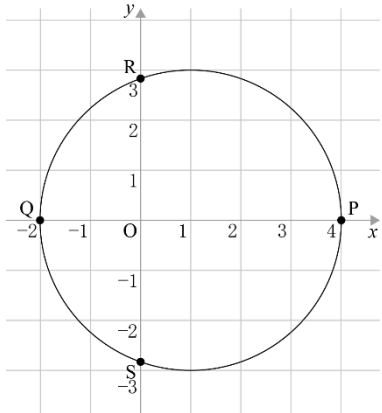
$z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと、
 $z^2=(x^2-y^2)+2xyi$
 z^2 が実数なので、 $xy=0$
したがって $x=0$ または $y=0$ となり、複素数 z の実数部分が 0 であるか、または虚数部分が 0 である。
なお、 $x=y=0$ の場合は $z=0$ となり、 $z=0$ は $|z-1|=3$ を満たさない。
したがって、 z が 0 以外の実数、または純虚数の場合を考えればよい。

(i) z が実数の場合
 $y=0$ より、 $z=x$ となるので、 $|x-1|=3$
 $x-1=\pm 3$
 $x=-2、4$
したがって、 $z=-2、4$

(ii) z が純虚数の場合
 $x=0$ より、 $z=yi$ となる。($y \neq 0$)
 $|yi-1|=3$ であるから、
 $|yi-1|^2=3^2$
 $(yi-1)(\overline{yi-1})=9$
 $(yi-1)(-yi-1)=9$
 $y^2+1=9$
 $y^2=8$
 $y=\pm 2\sqrt{2}$
したがって、 $z=\pm 2\sqrt{2}i$

(i)、(ii) より、求める z の値は、 $z=-2、4、\pm 2\sqrt{2}i$

<参考> $|z-1|=3$ を満たす複素数 z を表す点は点1を中心とする半径3の円周上にある。
また、 z^2 が実数であることから複素数 z を表す点は実軸上または虚軸上にある。
よって、右下図の複素数平面の4点P、Q、R、Sが題意を満たす z の複素数を表す点である。



(8 点)

Ⅱ [高等学校受験者]
第 2 問題

問 2	(1) ①は累乗の形にして底をそろえることができるが、②は底がそろえられないことから、②が①の考え方で解けないと考えた可能性がある。 「②では、底をそろえることはできないが、これらの数の値を変えずに累乗根の性質からそれぞれの数の表し方を変えて大小関係を分かりやすくできないかな？」 「②では、底をそろえることはできないが、これらの数の値を変えても大小関係が保存されるような方法はないかな？」 などの指導が考えられる。
	(2) $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$、$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$、$\sqrt[6]{6}$ より、$\sqrt[6]{6}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$ であるから、$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ となる。 (別) $(\sqrt{2})^6=2^3=8$、$(\sqrt[3]{3})^6=3^2=9$、$(\sqrt[6]{6})^6=6$ であり、 $\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{3}$、$\sqrt[6]{6}$ はすべて正の数なので$\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{3}$、$\sqrt[6]{6}$ とその 6 乗の大小は一致する。 したがって、$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ となる。 (8 点)

Ⅱ〔高等学校受験者〕
第3問題

問 1

240 人のうち、5 %の人数は 12 人である。240 人分のデータのヒストグラムから、1 の目が出た回数の多い方から 5 %の人数の人は、180 回中 38 回以上 1 の目が出ている。花子さんが 1 の目を出した回数 40 回は 38 回を超えた回数であるため、1 の目が出やすいサイコロであるという判断となる。

(8 点)

Ⅱ [高等学校受験者]
第3問題

問2	(1)	平均値 $am+b$	分散 a^2s^2
	(2)	(1)の結果から、$s_z^2=a^2s_x^2$、$s_u^2=c^2s_y^2$である。 したがって、$s_z=as_x$、$s_u=cs_y$となる。$(a>0、c>0$ であることに注意する。) 変量 x と変量 y の共分散 s_{xy} は、 $s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-m_x)(y_1-m_y)+(x_2-m_x)(y_2-m_y)+\cdots+(x_n-m_x)(y_n-m_y)\}$ ここで、 $(z_k-m_z)(u_k-m_u)=\{(ax_k+b)-(am_x+b)\}\{(cy_k+d)-(cm_y+d)\}=ac(x_k-m_x)(y_k-m_y)$ $(k=1、2、\cdots、n)$ となるので、 $s_{zu}=\frac{1}{n}\{(z_1-m_z)(u_1-m_u)+(z_2-m_z)(u_2-m_u)+\cdots+(z_n-m_z)(u_n-m_u)\}$ $=\frac{1}{n}ac\{(x_1-m_x)(y_1-m_y)+(x_2-m_x)(y_2-m_y)+\cdots+(x_n-m_x)(y_n-m_y)\}=acs_{xy}$ したがって、変量 z と変量 u の相関係数を r_{zu} とすると、 $r_{zu}=\frac{acs_{xy}}{as_x\times cs_y}=\frac{s_{xy}}{s_x\times s_y}=r$	

(10 点)

Ⅱ [高等学校受験者]
第 4 問題

問 1

① 和積公式を利用する方法

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \times 1 = \cos x\end{aligned}$$

② 加法定理を利用する方法

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1) \sin x + \cos x \sinh}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \quad \cdots (*) \\ \text{ここで、} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1)(\cosh + 1)}{h(\cosh + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cosh + 1)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cosh + 1)} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \times \frac{\sinh}{\cosh + 1} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{\cosh + 1} = -1 \times 0 = 0 \\ \text{したがって、} (*) \text{ は、} \\ \sin x \times 0 + \cos x \times 1 &= \cos x\end{aligned}$$

(8 点)

Ⅱ [高等学校受験者]
第 4 問題

問 2

$f(x)=\log ax$ とおく。原点を通る直線と関数 $y=\log ax$ のグラフとの接点 T の x 座標を $x=t$ とするとき、 $T(t, \log at)$ における接線の方程式は、

$y-\log at=\frac{1}{t}(x-t) \cdots \textcircled{1}$

① が原点を通るので、 $x=y=0$ を ① に代入して、
 $-\log at=-1$
 $\log at=1$

$at=e$

$t=\frac{e}{a}$

したがって、接点 T の座標は、

$T(\frac{e}{a}, 1)$

関数 $y=\log ax$ に接する接線で原点を通るものは、

$y=\frac{a}{e}x$

$V_1=\pi \int_0^{\frac{e}{a}}(\frac{a}{e}x)^2 dx-\pi \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}(\log ax)^2 dx \cdots (\textcircled{\ast})$

$\int_0^{\frac{e}{a}}(\frac{a}{e}x)^2 dx=\frac{a^2}{3e^2}[x^3]_0^{\frac{e}{a}}=\frac{a^2}{3e^2}\times\frac{e^3}{a^3}=\frac{e}{3a}$

$\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}(\log ax)^2 dx=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}(x)'(\log ax)^2 dx=[x(\log ax)^2]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}-2\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}\log ax dx=\frac{e}{a}-2\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}\log ax dx$

$=\frac{e}{a}-2\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}(x)'\log ax dx=\frac{e}{a}-2[x\log ax]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}+2\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}dx=\frac{e}{a}-2\times\frac{e}{a}+2(\frac{e}{a}-\frac{1}{a})=\frac{1}{a}(e-2)$

したがって、

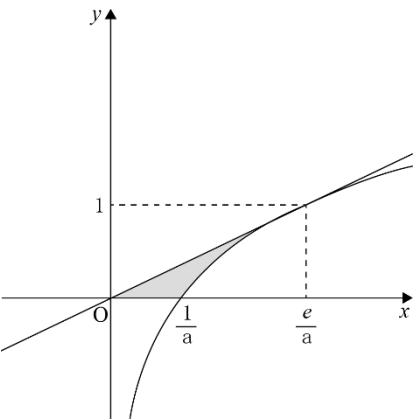
$V_1=(\frac{e}{3a}-\frac{e}{a}+\frac{2}{a})\pi=(\frac{-2e}{3a}+\frac{2}{a})\pi=\frac{6-2e}{3a}\pi$

$V_2=\pi \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}(\log ax)^2 dx=\frac{1}{a}(e-2)\pi$

$\frac{V_2}{V_1}=\frac{3a}{6-2e}\times\frac{e-2}{a}=\frac{3(e-2)}{6-2e}=\frac{3(e-2)}{2(3-e)}$

したがって、定数 a の値にかかわらず、 $\frac{V_2}{V_1}$ の値は一定になる。

($\textcircled{\ast}$) の $\pi \int_0^{\frac{e}{a}}(\frac{a}{e}x)^2 dx$ は、底面の半径が 1、高さが $\frac{e}{a}$ の円錐の体積なので $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot\frac{e}{a}=\frac{e}{3a}\pi$



(10 点)

整 理 番 号	

(この欄は記入しないこと)